数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 168-177

複数の選択肢がある協力ゲームへの Shapley 値と Banzhaf 値の拡張

大阪大学大学院基礎工学研究科
鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)
村井 繁 (Shigeru Murai)
乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

1 はじめに

協力ゲーム理論では，企業の共同事業や議案可決のための投票など，各プレイヤーが協力して，ある目的を達成するために行動する状況を扱い，投票システムにおける投票者の影響力分析など，多くの場面で有効な手法を提案している．通常の協力ゲームでは，各プレイヤーは，提携に協力するか，もしくは，協力しないという選択を行うものとし，形成された提携において，利得をどのように分配するかや，各プレイヤーはどの程度の影響力を持っているかを議論してきた．

協力ゲームの解とは，この合理的な利得分配方法や影響力を与えるものであり，通常の協力ゲームの重要な解として，Shapley 値 [7] や Banzhaf 値 [2] などが提案されている．通常の協力ゲームにおける Shapley 値は，各プレイヤーがある順番に従って 1 人ずつ「協力する」を選択していくという状況におけるプレイヤーの貢献度の期待値を表すと解釈できる．また，Banzhaf 値は，プレイヤーが「協力する」もしくは「協力しない」の 2 つの選択肢を等確率で選ぶという状況における貢献度の期待値を表すと解釈できる．これらの解は，議会における各政党の投票力分析などに応用されている．しかしながら，現実に表れる状況には，通常の協力ゲームとして定式化できないものも多い．そのような状況の 1 つとして，各プレイヤーには複数の選択肢があり，どの提携に参加するのかを選択できるような状況がある．

このような状況を扱うため，Bolger [3] は，多選択肢ゲームを定義しており，このゲームに対する解として，Bolger 値 [1, 3] や Banzhaf-like 値 [5] などが提案されている．この多選択肢ゲームにおいては，各プレイヤーは，いずれかの選択肢を必ず 1 つ選択して，提携に参加するとしている．しかしながら，実際には，いずれの選択肢も選ばず，いずれの提携にも参加しないプレイヤーも存在することがある．そこで，鶴見ら [8] は，複数の選択肢があり，どの選択肢も選択しないプレイヤーが存在する状況を扱うため，拡張多選択肢ゲームを定義した．

我々は，この拡張多選択肢ゲームに対する解として，通常の協力ゲームの解である Shapley 値と Banzhaf 値を拡張したものを提案し，その公理的特徴付けを行う．拡張 Shapley 値は，各プレイヤーがある順番に従って 1 人ずついずれかの選択肢を選択して，提携に加わっていく，という状況におけるプレイヤーの貢献度の期待値として定義する．また，拡張 Banzhaf 値は，いずれかの選択肢を選ぶか，もしくはいずれも選ばないという選択を各プレイヤーが等確率で行うという状況におけるプレイヤーの貢献度の期待値として定義する．

2 既存の研究

2.1 通常の協力ゲームの定式化

有限集合 N を n 人のプレイヤーからなるプレイヤー集合とし，N の部分集合 $S \in 2^N$ を提携と呼ぶ．通常の協力ゲームは，$v(\emptyset) = 0$ なる関数 $v : 2^N \to \mathbb{R}$ として定義される．提携 $S \in 2^N$ に対し，$v(S)$ は，提携 S が得る利得を表している．通常の協力ゲームすべてからなる集合を $\mathcal{G}(N)$ と記す．

集合 $\mathcal{G}(N)$ に対して，自然な形で和とスカラー倍を定義すれば，$\mathcal{G}(N)$ はベクトル空間となる．$T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ に対して，ゲーム $u_T \in \mathcal{G}(N)$ を，$S \subseteq T$ ならば $u_T(S) = 1$，そうでなければ $u_T(S) = 0$ と定義し，満場一致ゲームと呼ぶ．このとき，$\{u_T \mid T \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}$ は，$\mathcal{G}(N)$ の基底をなす．すなわち，任意の $v \in \mathcal{G}(N)$ は，$c_T = \sum_{S:S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|} \cdot v(S)$ とおくと，$v = \sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} c_T \cdot u_T$ と一意に表される．

2.2 束 $(2^N, \subseteq)$ とメビウス変換

一般に，集合 P と P 上の半順序関係 $\leq$ に対して，$(P, \leq)$ が束であるとは，任意の $x, y \in P$ に対して，上限 $x \vee y$ と下限 $x \wedge y$ が存在するときにいう．また，P の部分集合 $\mathscr{C} \subseteq P$ が鎖であるとは，任意の $x, y \in \mathscr{C}$ に対して，$x \leq y$ または $x \geq y$ が成立するときにいい，鎖 $\mathscr{C}$ が極大鎖であるとは，$\mathscr{C}$ を真に含むような鎖が存在しないときにいう．また，鎖 $\mathscr{C}$ に対して，$|\mathscr{C}| - 1$ を鎖 $\mathscr{C}$ の長さという．

2^N と集合の包含関係 $\subseteq$ に対して，$(2^N, \subseteq)$ は束となる．なぜならば，任意の $S, T \in 2^N$ に対して，上限 $S \vee T = S \cup T$ と下限 $S \wedge T = S \cap T$ は，必ず存在するからである．束 $(2^N, \subseteq)$ の極大鎖の長さはすべて n であり，すべての極大鎖からなる集合を $\mathcal{M}(2^N)$ と記す．以下では，束 $(2^N, \subseteq)$ の長さ m の鎖 $\mathscr{C}$ を $\mathscr{C} = \{C^0, C^1, \ldots, C^m\}$ と記す．ただし，$C^0 \subsetneq C^1 \subsetneq \cdots \subsetneq C^m$ とする．

束 $(2^N, \subseteq)$ 上の関数 $f : 2^N \to \mathbb{R}$ のメビウス変換とは，$f(S) = \sum_{T:T\subseteq S} m_f(T)$ を満たす関数 $m_f : 2^N \to \mathbb{R}$ のことをいう [4, 6]．任意の $v \in \mathcal{G}(N)$ は，$v = \sum_{T\in 2^N\setminus\{\emptyset\}} c_T \cdot u_T$ と一意に表されることから，

$$m_v(T) = \sum_{S:S\subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} \cdot v(S)$$

となる．

2.3 通常の協力ゲームの解

関数 $\varphi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^N$ を通常の協力ゲームの解と呼ぶ．通常の協力ゲーム $v \in \mathcal{G}(N)$ に対して，値 $\varphi_i(v)$ は，プレイヤー $i \in N$ に分配される利得や，影響力などを表す．通常の協力ゲームの重要な解として，Shapley 値や Banzhaf 値が提案されている．これらは，それぞれ，極大鎖における限界貢献度と，提携における限界貢献度を用いて定義される．

極大鎖 $\mathscr{C} \in \mathcal{M}(2^N)$ におけるプレイヤー $i \in N$ の限界貢献度 $m_i^{\mathscr{C}}(v)$ は，$m_i^{\mathscr{C}}(v) = v(C(i) \cup \{i\}) - v(C(i))$ と定義される．ただし，$C(i)$ は，$\mathscr{C}$ において，$C^k \not\ni i$ かつ $C^{k+1} \ni i$ であるような C^k を表す．極大鎖 $\mathscr{C} = \{C^0, \ldots, C^n\}$ は，$\mathscr{C}$ に従った順番に1人ずつ各プレイヤーが提携に参加していき，初期状態 $C^0 = \emptyset$ から最終状態である全体提

携 $C^n = N$ を形成していく状況を表していると解釈できる．$m_i^{\mathscr{C}}(v)$ は，このような状況のもとでのプレイヤー $i \in N$ の貢献度を表している．

提携 $S \in 2^{N\setminus\{i\}}$ におけるプレイヤー $i \in N$ の限界貢献度 $m_i^S(v)$ は，$m_i^S(v) = v(S \cup \{i\}) - v(S)$ と定義される．これは，提携 $S \in 2^{N\setminus\{i\}}$ に，プレイヤー $i \in N$ が加わることによって，変化する提携値を表している．

2.3.1 Shapley 値と Banzhaf 値

通常の協力ゲームの Shapley 値は，次のように定義される．

定義 1 ([4, 7]) 次で定義される $\phi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^N$ は，$\mathcal{G}(N)$ 上の Shapley 値と呼ばれる．

$$\phi_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(2^N)|} \sum_{\mathscr{C} \in \mathcal{M}(2^N)} m_i^{\mathscr{C}}(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\mathscr{C} \in \mathcal{M}(2^N)} \{v(C(i) \cup \{i\}) - v(C(i))\}.$$

各プレイヤーがある順番に従って1人ずつ提携に加わっていき，全体提携を形成するという状況を考える．Shapley 値は，このような順番がすべて等確率で発生するとした場合のプレイヤーの貢献度の期待値を表すと解釈できる．

Shapley 値は，式 (1) のように，提携における限界貢献度を用いて表すこともできる．

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in 2^{N\setminus\{i\}}} \frac{|S|! \cdot (n - |S| - 1)!}{n!} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\}. \tag{1}$$

また，Shapley 値は，メビウス変換を用いて，次のように表すこともできる [4].

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{T \in 2^N \\ T \ni i}} \frac{m_v(T)}{|T|}. \tag{2}$$

Shapley 値は，全体効率性，すなわち，$v(N) = \sum_{i \in N} \phi_i(v)$ を満たす．そのため，全体提携が形成された場合において，Shapley 値によって，各プレイヤーへの利得分配方法を決めれば，利得 $v(N)$ を過不足なく分け合うことができる．

通常の協力ゲームの Banzhaf 値は，次のように定義される．

定義 2 ([2]) 次で定義される $\beta : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^N$ は，$\mathcal{G}(N)$ 上の Banzhaf 値と呼ばれる．

$$\beta_i(v) = \frac{1}{|2^{N\setminus\{i\}}|} \sum_{S \in 2^{N\setminus\{i\}}} m_i^S(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \in 2^{N\setminus\{i\}}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\}.$$

プレイヤー $i \in N$ 以外のプレイヤーが協力する，もしくは，協力しないの2つの選択肢を等確率で選んだ後，プレイヤー $i \in N$ が提携に参加する，という状況を考える．Banzhaf 値は，このような状況におけるプレイヤー $i \in N$ の貢献度の期待値を表すと解釈できる．

Banzhaf 値は，メビウス変換を用いて，次のように表すこともできる [4].

$$\beta_i(v) = \sum_{\substack{T \in 2^N \\ T \ni i}} \frac{m_v(T)}{2^{|T|-1}}. \tag{3}$$

2.4 拡張多選択肢ゲームの定式化

現実に表れる状況には，通常の協力ゲームとして定式化できないが，拡張多選択肢ゲームとして定式化できるものがある．そのような例として，次の2つの例を挙げる．

例 1 (規格争い) 4つの企業 A, B, C, D があり，ある製品（例えば DVD など）について3つの規格 P, Q, R があるとする．各企業には，3つの規格のいずれか1つに参入する，もしくは，いずれの規格にも参入しない，という選択肢がある．

ある規格の製品全体の売上は，その規格にどの企業が参入しているかだけではなく，他の企業がどのような選択をしているかに依存する．例えば，規格 P に企業 A, B が参入しているとする．企業 C, D がいずれの規格にも参入しない場合に比べて，企業 C, D が規格 Q に参入している場合の方が，規格 P の製品全体の売上は，より少なくなるだろう．

例 2 (選挙) 10人の投票者がいて，4人の候補者 A, B, C, D から1人を選ぶ選挙を考える．得票数が最多であることと全体の投票率が 50% 以上であることが当選するための条件であるとする．各投票者には，4人の候補者のいずれか1人に投票する，もしくは，投票を棄権する，という選択肢がある．

ある候補者が当選するかどうかは，その候補者にどの投票者が投票しているかだけでなく，他の投票者がどのように投票しているかに依存する．例えば，候補者 A に投票者が4人投票しているとする．他の投票者がすべて棄権すれば，候補者 A は当選しないが，他の投票者のうち1人だけが，いずれかの候補者に投票すれば，候補者 A は当選する．

以下では，拡張多選択肢ゲームの定式化を行う．通常の協力ゲームと同様に，有限集合 N を n 人のプレイヤーからなるプレイヤー集合とし，また，有限集合 R を r 個の選択肢からなる選択肢集合とする．$a_0 \notin R$ を R のいずれの選択肢も選択しないことを意味する選択肢であるとして，$R \cup \{a_0\}$ を拡張選択肢集合と呼び，これを $\bar{R}$ と記す．

拡張多選択肢ゲームでは，各プレイヤーは R のいずれかの選択肢を1つ選択するか，もしくは，いずれの選択肢も選択しない，すなわち，$\bar{R}$ のいずれかの選択肢を必ず1つ選択するという状況を扱う．このような状況を扱うため，部分アレンジメントを次のように定義する．

定義 3 ([8]) 次を満たす $\mathcal{S} = (S_a)_{a \in R}$ を N に対する多選択肢間の部分アレンジメント，あるいは単に部分アレンジメントと呼ぶ．

$$S_a \subseteq N, \ \forall a \in R,$$
$$S_a \cap S_b = \emptyset, \ \forall a \neq b.$$

選択肢 $a \in R$ に対して，S_a は選択肢 $a \in R$ を選択して協力している提携を表している．部分アレンジメント全体からなる集合を $\bar{R}^N$ と記し，$\bar{R}^N_0 = \bar{R}^N \setminus \{(\emptyset, \ldots, \emptyset)\}$ とする．部分アレンジメント $\mathcal{S}$ に対して，$S_{a_0} = N \setminus (\cup_{a \in R} S_a)$，$|\mathcal{S}| = n - |S_{a_0}|$ とする．S_{a_0} は R のいずれの選択肢も選択していないプレイヤーからなる集合を，そして，$|\mathcal{S}|$ は R のいずれかの選択肢を選択しているプレイヤーの数を表している．$S_{a_0} \not\ni i$ であることを $\mathcal{S} \ni i$ と書く．部分アレンジメント $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ に対して，$\mathcal{S} \cup \mathcal{T} = (S_a \cup T_a)_{a \in R}$,

$\mathcal{S} \cap \mathcal{T} = (S_a \cap T_a)_{a \in R}$ と定義する．また，$P \subseteq N$ と選択肢 $a \in R$ に対して，部分アレンジメント $P^a = (P^a_b)_{b \in R}$ を $b = a$ ならば $P^a_b = P$，そうでなければ $P^a_b = \emptyset$ と定義する．例えば，$\{i\}^a = (\emptyset, \ldots, \emptyset, \{i\}, \emptyset, \ldots, \emptyset)$ である．

この部分アレンジメントに基づき，拡張多選択肢ゲームを次のように定義する．

定義 4 ([8]) 関数 $v : \bar{R}^N \to \mathbb{R}^R$ のうち，任意の $a \in R$ に対して，$v_a(\emptyset, \ldots, \emptyset) = 0$ を満たすものを拡張多選択肢ゲームと呼ぶ．

選択肢 $a \in R$ に対して，$v_a(\mathcal{S})$ は，各プレイヤーが部分アレンジメント $\mathcal{S}$ に従って選択肢を選択するときの提携 S_a の得る利得を表している．プレイヤー集合 N と選択肢集合 R を基にしたすべての拡張多選択肢ゲームからなる集合を $\mathcal{G}(N, R)$ と記す．明らかに $|R| = 1$ であるとき，$\mathcal{G}(N, R) = \mathcal{G}(N)$ である，すなわち，$|R| = 1$ であるとき，拡張多選択肢ゲームは，通常の協力ゲームと一致する．また，$|R| = 2$ であるとき，R の一方の選択肢を「協力する」とし，他方の選択肢を「敵対する」とすれば，双協力ゲームとみなすこともできる．

3 拡張多選択肢ゲームの解

ここでは，我々の提案する拡張多選択肢ゲームの解について述べる．我々の提案する解は，部分アレンジメント間のある半順序関係に基づいているといえる．解の定義，性質と公理系について述べるための準備として，まず，この半順序関係を用いて定義される満場一致ゲームの線形結合によって，任意の拡張多選択肢ゲームが一意に表されることと，この半順序関係と部分アレンジメント全体の集合からなる半順序集合の性質を明らかにする．

3.1 ベクトル空間 $\mathcal{G}(N, R)$ の基底

集合 $\bar{R}^N$ 上の半順序関係 $\subseteq$ を，

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \iff S_a \subseteq T_a, \ \forall a \in R. \tag{4}$$

と定義し，関数 $u_\mathcal{T} : \bar{R}^N \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ ならば $u_\mathcal{T}(\mathcal{S}) = 1$，そうでなければ $u_\mathcal{T}(\mathcal{S}) = 0$ と定義すると，次の補題 1 が成立する．

補題 1 任意の拡張多選択肢ゲーム $v \in \mathcal{G}(N, R)$ において，

$$v_a = \sum_{\mathcal{T} \in \bar{R}^N_0} c^a_\mathcal{T} \cdot u_\mathcal{T}, \ \forall a \in R,$$

と一意に表される．ただし，$c^a_\mathcal{T} = \sum_{\mathcal{S}:\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}} (-1)^{|\mathcal{T}| - |\mathcal{S}|} \cdot v_a(\mathcal{S})$ である．

$\mathcal{G}(N, R)$ における満場一致ゲーム $u^a_\mathcal{T}$ を $b = a$ ならば $(u^a_\mathcal{T})_b = u_\mathcal{T}$，そうでなければ $(u^a_\mathcal{T})_b = 0$ と定義する．このとき，補題 1 より，$\{u^a_\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \in \bar{R}^N_0, a \in R\}$ は，$\mathcal{G}(N, R)$ の基底をなす．すなわち，次の命題 1 が成立する．

命題 1 任意の拡張多選択肢ゲーム $v \in \mathcal{G}(N,R)$ は,

$$v = \sum_{a \in R} \sum_{\mathcal{T} \in \bar{R}_0^N} c_{\mathcal{T}}^a \cdot u_{\mathcal{T}}^a,$$

と一意に表される．ただし，$c_{\mathcal{T}}^a = \sum_{\mathcal{S}:\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}} (-1)^{|\mathcal{T}|-|\mathcal{S}|} \cdot v_a(\mathcal{S})$ である．

3.2 下半束 $(\bar{R}^N, \subseteq)$ とメビウス変換

一般に，集合 P と P 上の半順序関係 $\leq$ に対して，$(P,\leq)$ が下半束であるとは，任意の $x, y \in P$ に対して，下限 $x \wedge y$ が存在するときにいう．

すべての部分アレンジメントの集合 $\bar{R}^N$ と式 (4) 定義される二項関係 $\subseteq$ に対して，$(\bar{R}^N, \subseteq)$ は下半束となる．なぜならば，任意の $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \bar{R}^N$ に対して，上限 $\mathcal{S} \vee \mathcal{T}$ は必ずしも存在しないが，下限 $\mathcal{S} \wedge \mathcal{T} = (S_a \cap T_a)_{a \in R}$ は必ず存在するからである．また，$(\bar{R}^N, \subseteq)$ の極大鎖の長さはすべて n であり，すべての極大鎖からなる集合を $\mathcal{M}(\bar{R}^N)$ と記す．以下では，長さ m の鎖 $\mathscr{C}$ を $\mathscr{C} = \{\mathcal{C}^0, \mathcal{C}^1, \ldots, \mathcal{C}^m\}$ と記す．ただし，$\mathcal{C}^0 \subseteq \mathcal{C}^1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}^m$ とする．$N = \{1,2\}, R = \{a_1, a_2\}$ であるときの $(\bar{R}^N, \subseteq)$ を図 1 に示す．

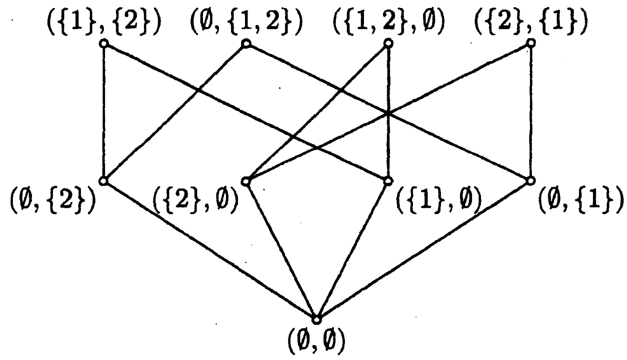

図 1: $N = \{1,2\}, R = \{a_1, a_2\}$ のときの $(\bar{R}^N, \subseteq)$.

下半束 $(\bar{R}^N, \subseteq)$ 上の関数 $f : \bar{R}^N \to \mathbb{R}$ のメビウス変換とは，次の等式を満たす関数 $m_f : \bar{R}^N \to \mathbb{R}$ のことをいう [4, 6].

$$f(\mathcal{S}) = \sum_{\mathcal{T}:\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}} m_f(\mathcal{T}).$$

補題 1 より，拡張多選択肢ゲーム $v \in \mathcal{G}(N,R)$ と選択肢 $a \in R$ に対して，関数 v_a のメビウス変換 m_{v_a} は，次のとおりとなる．

$$m_{v_a}(\mathcal{T}) = \sum_{\mathcal{S}:\mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}} (-1)^{|\mathcal{T}|-|\mathcal{S}|} \cdot v_a(\mathcal{S})$$

3.3 拡張 Shapley 値と拡張 Banzhaf 値

関数 $\varphi : \mathcal{G}(N,R) \to \mathbb{R}^N$ を拡張多選択肢ゲームの解と呼ぶ．我々は，拡張多選択肢ゲームの解として，通常の協力ゲームの解である Shapley 値と Banzhaf 値を拡張したものを提案する．これらは，それぞれ，極大鎖 $\mathscr{C} \in \mathcal{M}(\bar{R}^N)$ における限界貢献度と，部分アレンジメント $\mathcal{S} \in \bar{R}^N$ における限界貢献度を用いて定義される．

3.3.1 拡張 Shapley 値の定義とその性質

極大鎖 $\mathscr{C} \in \mathcal{M}(\bar{R}^N)$ におけるプレイヤー $i \in N$ の限界貢献度 $m_i^{\mathscr{C}}(v)$ は，通常の協力ゲームと同様に，$m_i^{\mathscr{C}}(v) = v_a(\mathcal{C}(i) \cup \{i\}^a) - v_a(\mathcal{C}(i))$ と定義される．ただし，$\mathscr{C}$ において，$\mathcal{C}^k \not\ni i$ かつ $\mathcal{C}^{k+1} \ni i$ であるような $\mathcal{C}^k$ を $\mathcal{C}(i)$ とおき，選択肢 $a \in R$ を $i \in (\mathcal{C}^n)_a$ なるものとおいている．極大鎖 $\mathscr{C} = \{\mathcal{C}^0, \ldots, \mathcal{C}^n\}$ は，$\mathscr{C}$ に従った順番に 1 人ずつ各プレイヤーが R のいずれかの選択肢を選択していき，初期状態 $\mathcal{C}^0 = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$ から最終状態である $\mathcal{C}^n$ を形成していく状況を表していると解釈できる．最終状態 $\mathcal{C}^n$ においては，すべてのプレイヤーは，R のいずれかの選択肢を選択している．$m_i^{\mathscr{C}}(v)$ は，このような状況のもとでのプレイヤー $i \in N$ の貢献度を表している．

すべての極大鎖が等確率で生じるときの極大鎖における限界貢献度の期待値として，拡張多選択肢ゲームの拡張 Shapley 値を次のように定義する．

定義 5 次で定義される $\phi : \mathcal{G}(N,R) \to \mathbb{R}^N$ を，$\mathcal{G}(N,R)$ 上の拡張 Shapley 値と呼ぶ．

$$\phi_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{M}(\bar{R}^N)|} \sum_{\mathscr{C} \in \mathcal{M}(\bar{R}^N)} m_i^{\mathscr{C}}(v) = \frac{1}{n! \cdot r^n} \sum_{\mathscr{C} \in \mathcal{M}(\bar{R}^N)} \{v_a(\mathcal{C}(i) \cup \{i\}^a) - v_a(\mathcal{C}(i))\}.$$

各プレイヤーがある順番に従って 1 人ずつ R のいずれかの選択肢を選択して，提携に加わっていく，という状況を考える．拡張 Shapley 値は，このような順番がすべて等確率で発生し，各プレイヤーは R の各選択肢を等確率で選ぶとした場合におけるプレイヤーの参加する提携への貢献度の期待値を表すと解釈できる．

拡張 Shapley 値は，次のように部分アレンジメントにおける限界貢献度を用いても表すことができる．

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{\mathcal{S} \in \bar{R}^N \\ S_{a_0} \ni i}} \frac{(|\mathcal{S}|)! \cdot (n - |\mathcal{S}| - 1)!}{n! \cdot r^{|\mathcal{S}|+1}} \sum_{a \in R} \{v_a(\mathcal{S} \cup \{i\}^a) - v_a(\mathcal{S})\}. \tag{5}$$

また，拡張 Shapley 値は，メビウス変換を用いて，次のように表すこともできる．

$$\phi_i(v) = \sum_{a \in R} \sum_{\substack{\mathcal{T} \in \bar{R}_0^N \\ T_a \ni i}} \frac{m_{v_a}(\mathcal{T})}{|\mathcal{T}| \cdot r^{|\mathcal{T}|}}. \tag{6}$$

明らかに，定義 5，式 (5) と式 (6) は，$|R| = 1$ であるとき，それぞれ，定義 1，式 (1) と式 (2) に一致する．

この拡張 Shapley 値は，通常の協力ゲームにおける Shapley 値とは異なり，通常の協力ゲームにおける全体効率性に相当する公理を満たさない．従って，例 1 のような状況において，すべての企業が同一の規格に参入した場合に，拡張 Shapley 値を用いて，利得を各企業へ過不足なく分配することはできない．

これは，我々が拡張 Shapley 値を考えるとき，すべてのプレイヤーが最終的に同一の選択肢 $a \in R$ を選択し，同一の提携に参加するという仮定ではなく，すべてのプレイヤーが最終的に R のいずれかの選択肢を選択し，いずれかの提携に参加するという仮定をし

ているためである．確かに，例 1 のような状況においては，すべてのプレイヤーは，最終的に同一の選択肢を選択するという仮定は自然であるように思える．しかしながら，例 2 のような状況においては，すべての投票者が最終的に同一の候補者に投票する，すなわち，ある候補者の得票率が 100% になるという仮定よりも，すべての投票者が最終的にいずれかの候補者に投票する，すなわち，全体の投票率が 100% になるという仮定の方が，より自然であるように思える．

また，選択肢ごとにプレイヤーの値を割り当てる関数を解として考えることができる．すなわち，$\Phi : \mathcal{G}(N,R) \to \mathbb{R}^{N\times R}$ を解と考えることができる．このとき，関数の $(i,p) \in N\times R$ 成分を φ_i^p と表す．この場合にも拡張 Shapley 値 $\Phi = (\phi_i^p)_{(i,p)\in N\times R}$ を考えることができ，次で定義する．

$$\phi_i^p(v) = \sum_{\substack{\mathcal{S}\in\bar{R}^N\\ S_{a_0}\ni i}} \frac{(|\mathcal{S}|)!\cdot(n-|\mathcal{S}|-1)!}{n!\cdot r^{|\mathcal{S}|}}\{v_p(\mathcal{S}\cup\{i\}^p) - v_p(\mathcal{S})\}.$$

$\phi = \sum_{a\in R}\phi^a/r$ であり，この ϕ^p は，ϕ の本研究で与える公理系を少し変形させることで，同様の公理的特徴付けを行うことができる．

3.3.2 拡張 Banzhaf 値の定義とその性質

$S_{a_0} \ni i$ なる部分アレンジメント $\mathcal{S} \in \bar{R}^N$ におけるプレイヤー $i \in N$ の選択肢 $a \in R$ に対する限界貢献度 $m_i^{\mathcal{S},a}(v)$ は，$m_i^{\mathcal{S},a}(v) = v_a(\mathcal{S}\cup\{i\}^a) - v_a(\mathcal{S})$ と定義される．これは，$S_{a_0} \ni i$ なる部分アレンジメント $\mathcal{S} \in \bar{R}^N$ に，プレイヤー $i \in N$ が選択肢 $a \in R$ を選択して，提携 S_a に加わることによって，変化する提携値を表している．

すべての $S_{a_0} \ni i$ なる部分アレンジメント $\mathcal{S} \in \bar{R}^N$ が等確率で生じ，かつ，R から等確率で選択肢 $a \in R$ が選ばれるときの部分アレンジメントにおける限界貢献度の期待値として，拡張多選択肢ゲームの拡張 Banzhaf 値を次のように定義する．

定義 6 次で定義される $\beta : \mathcal{G}(N,R) \to \mathbb{R}^N$ を，$\mathcal{G}(N,R)$ 上の拡張 Banzhaf 値と呼ぶ．

$$\begin{aligned}\beta_i(v) &= \frac{1}{|\{\mathcal{S}\in\bar{R}^N \mid S_{a_0}\ni i\}|\cdot|R|}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\bar{R}^N\\ S_{a_0}\ni i}}\sum_{a\in R} m_i^{\mathcal{S},a}(v)\\ &= \frac{1}{(r+1)^{n-1}\cdot r}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\bar{R}^N\\ S_{a_0}\ni i}}\sum_{a\in R}\{v_a(\mathcal{S}\cup\{i\}^a) - v_a(\mathcal{S})\}.\end{aligned}$$

プレイヤー $i \in N$ 以外のプレイヤーが，$\bar{R}$ の $r+1$ 個の選択肢を等確率で選んだ後，プレイヤー $i \in N$ が R の r 個の選択肢を等確率で選び，提携に参加する，という状況を考える．拡張 Banzhaf 値は，このような状況におけるプレイヤーの参加する提携への貢献度の期待値を表すと解釈できる．

拡張 Banzhaf 値は，メビウス変換を用いて，次のように表すこともできる．

$$\beta_i(v) = \sum_{a\in R}\sum_{\substack{\mathcal{T}\in\bar{R}_0^N\\ T_a\ni i}} \frac{m_{v_a}(\mathcal{T})}{(r+1)^{|\mathcal{T}|-1}\cdot r}. \tag{7}$$

明らかに，定義 6 と式 (7) は，$|R|=1$ であるとき，それぞれ，定義 2 と式 (3) に一致する．

また，拡張 Shapley 値の場合と同様に，選択肢ごとにプレイヤーの値を割り当てる拡張 Banzhaf 値 $\mathrm{B}=(\beta_i^p)_{(i,p)\in N\times R}$ を次で定義する．

$$\beta_i^p(v)=\frac{1}{(r+1)^{n-1}}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\bar{R}^N\\ S_{a_0}\ni i}}\{v_p(\mathcal{S}\cup\{i\}^p)-v_p(\mathcal{S})\}.$$

鶴見ら [8] は，この β^p が多重線形展開型多選択肢ファジィゲームにおいて，ファジィアレンジメントの重心におけるファジィ貢献度と一致することと，すべてのファジィアレンジメントが独立かつ等確率で生じるときのファジィ貢献度の期待値とも一致することを示している．$\beta=\sum_{a\in R}\beta^a/r$ であり，この β^p は，β の本研究で与える公理系を少し変形させることで，同様の公理的特徴付けを行うことができる．

3.3.3 拡張 Shapley 値と拡張 Banzhaf 値の公理系

拡張 Shapley 値と拡張 Banzhaf 値の公理的特徴付けを行うために次の公理を導入する．公理 1 は，ナルプレイヤーに関する公理である．プレイヤー $i\in N$ がナルプレイヤーであるとは，任意の $a\in R$ と任意の $\mathcal{S}\in\bar{R}^N$ に対して，$i\in S_{a_0}$ ならば，$v_a(\mathcal{S}\cup\{i\}^a)=v_a(\mathcal{S})$ であるときにいう．

公理 1 (ナルプレイヤーに関する性質) 任意の拡張多選択肢ゲーム $v\in\mathcal{G}(N,R)$ において，プレイヤー $i\in N$ がナルプレイヤーならば，$\varphi_i(v)=0$ が成立する．

公理 2 (線形性) 任意の拡張多選択肢ゲーム $v\in\mathcal{G}(N,R)$, $w\in\mathcal{G}(N,R)$ と任意の実数 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ に対して，$\varphi(\alpha\cdot v+\beta\cdot w)=\alpha\cdot\varphi(v)+\beta\cdot\varphi(w)$ が成立する．

公理 3 (無名性) 任意の拡張多選択肢ゲーム $v\in\mathcal{G}(N,R)$ と任意の順列 $\pi\in\Pi(N)$ に対して，$\varphi_i(v)=\varphi_{\pi(i)}(\pi v)$ が成立する．ただし，πv は任意の部分アレンジメント $\mathcal{S}$ に対して，$\pi v(\mathcal{S})=v(\pi^{-1}(\mathcal{S}))(=v((\pi^{-1}(S_a))_{a\in R}))$ が成立する拡張多選択肢ゲームである．

公理 4 (極大鎖における限界貢献度の総和に関する性質) 任意の拡張多選択肢ゲーム $v\in\mathcal{G}(N,R)$ に対して，$\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=\frac{1}{|\mathcal{M}(\bar{R}^N)|}\sum_{i\in N}\sum_{\mathscr{C}\in\mathcal{M}(\bar{R}^N)}m_i^{\mathscr{C}}(v)$ が成立する．

公理 5 (部分アレンジメントにおける限界貢献度の総和に関する性質) 任意の拡張多選択肢ゲーム $v\in\mathcal{G}(N,R)$ に対して，$\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=\frac{1}{(r+1)^{n-1}\cdot r}\sum_{i\in N}\sum_{\substack{\mathcal{S}\in\bar{R}^N\\ S_{a_0}\ni i}}\sum_{a\in R}m_i^{\mathcal{S},a}(v)$ が成立する．

公理 6 (満場一致ゲームに関する性質) 任意の選択肢 $a\in R$ と任意の部分アレンジメント $\mathcal{T}\in\bar{R}_0^N$ に対して，$i\in T_a$ ならば $\varphi_i(u_{\mathcal{T}}^a)=\frac{1}{|\mathcal{T}|\cdot r^{|\mathcal{T}|}}$，そうでなければ $\varphi_i(u_{\mathcal{T}}^a)=0$ が成立する．

公理 7 (満場一致ゲームに関する性質) 任意の選択肢 $a\in R$ と任意の部分アレンジメント $\mathcal{T}\in\bar{R}_0^N$ に対して，$i\in T_a$ ならば $\varphi_i(u_{\mathcal{T}}^a)=\frac{1}{(r+1)^{|\mathcal{T}|-1}\cdot r}$，そうでなければ $\varphi_i(u_{\mathcal{T}}^a)=0$ が成立する．

拡張 Shapley 値は，公理 1, 2, 3, 4, 6 を用いて，次のように特徴付けることができる．

定理 1 公理 1, 2, 3, 4 を満たす拡張多選択肢ゲームの解が唯 1 つ存在し，それは ϕ である．

定理 2 公理 2, 6 を満たす拡張多選択肢ゲームの解が唯 1 つ存在し，それは ϕ である．

拡張 Banzhaf 値は，公理 1, 2, 3, 5, 7 を用いて，次のように特徴付けることができる．

定理 3 公理 1, 2, 3, 5 を満たす拡張多選択肢ゲームの解が唯 1 つ存在し，それは β である．

定理 4 公理 2, 7 を満たす拡張多選択肢ゲームの解が唯 1 つ存在し，それは β である．

4 おわりに

本研究では，複数の選択肢があり，いずれの選択肢も選択しないプレイヤーが存在する状況を扱うことができる拡張多選択肢ゲームに対して，通常の協力ゲームの重要な解である Shapley 値と Banzhaf 値を拡張した解を提案し，その公理的特徴付けを行った．

参考文献

[1] Albizuri M. Josune, Santos J. Carlos, José M. Zarzuelo: Solutions for cooperative games with r alternatives, *Review of Economic Design*, **4** (1999), 345–356.

[2] John F. Banzhaf: Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, **19** (1965), 317–343.

[3] Edward M. Bolger: A Value for Games with n Players and r Alternatives, *International Journal of Game Theory*, **22** (1993), 319–334.

[4] Michel Grabisch: Capacities and Games on Lattices: A Survey of Results, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **14**(4) (2006), 371–392.

[5] Rie Ono: Values for Multialternative Games and Multilinear Extensions, *Homo Oeconomicus*, **17** (2000), 193–214.

[6] Gian-Carlo Rota: On the foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **2** (1964), 340–368.

[7] Lloyd S. Shapley: A value for n-person games, *Contributions to the Theory of Games*, **2** (1953), 307–317.

[8] Masayo Tsurumi, Masahiro Inuiguchi, Tetsuzo Tanino: A Solution for Fuzzy Generalized Multialternative Games, *The 2006 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2006) Conference Proceedings*, (2006), 95–98.